Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Φροντιστηριακές ασκήσεις #5, Απρίλιος 2016, Διαδικασία Gram-Schmidt

1. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^4$ εφοδιασμένο με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου V που παράγεται απο τα διανύσματα

$$u_1 = (1, 1, 0, 0), \quad u_2 = (0, -1, 0, 2)$$

και να την συμπληρώσετε σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^4$.

2. Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}_3[x]$, εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx,$$

να βρείτε μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου V που παράγεται από τα $1, x, x^2$.

3. Έστω

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0\}$$

και

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y - 3z = 0, 2x + y - 3z = 0\}$$

υπόχωροι του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^3$ με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο. Να βρείτε:

(α) Ορθοκανονικές βάσεις των V και W.

(β) Την ορθογώνια προβολή του διανύσματος $(1, 1, 1)$ στον υπόχωρο V.

4. Δείξτε ότι οι υπόχωροι

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

και

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_2 = x_3 = x_4\}$$

του Ευκλειδείου χώρου $\mathbb{R}^4$ με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο είναι ορθοσυμπληρωματικοί.

Φροντιστηριακές ασκήσεις #5

Άσκηση 1.

$V \subseteq \mathbb{R}^4$ $\quad\quad \vec{u_1} = (1,1,0,0)$

$V = \langle \vec{u_1}, \vec{u_2} \rangle$ $\quad\quad \vec{u_2} = (0,-1,0,2)$

$\vec{a_1} = \vec{u_1}$, $\vec{a_2} = \vec{u_2}$

$\vec{\beta_1} = \vec{a_1} = (1,1,0,0)$

$$\vec{\beta_2} = \vec{a_2} - \frac{\langle \vec{a_2}, \vec{\beta_1} \rangle}{\langle \vec{\beta_1}, \vec{\beta_1} \rangle} \cdot \vec{\beta_1} = \frac{\langle (0,-1,0,2),(1,1,0,0) \rangle}{\langle (1,1,0,0)(1,1,0,0) \rangle}(1,1,0,0)$$

$$\vec{\beta_2} = (0,-1,0,2) - \frac{-1}{2}(1,1,0,0) = (0,-1,0,2) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 2\right)$$

Ελέγχω αν $\vec{\beta_1} \perp \vec{\beta_2}$ με $\langle \vec{\beta_1}, \vec{\beta_2} \rangle = 0$

$$\vec{\gamma_1} = \frac{1}{\|\vec{\beta_1}\|} \vec{\beta_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$$

$$\vec{\gamma_2} = \frac{1}{\|\vec{\beta_2}\|} \cdot \vec{\beta_2} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 2^2}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 2\right) = \frac{1}{\sqrt{9/2}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 2\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

- Ορθογώνια βάση του V $\vec{\beta_1} = (1,1,0,0)$, $\vec{\beta_2} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 2\right)$

- Ορθοκανονική βάση $\vec{\gamma_1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$, $\vec{\gamma_2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$\vec{\alpha_1} = (1,1,0,0)$

$\vec{\alpha_2} = (0,-1,0,0)$ βάση του R^4

Τα επιλέγουμε εμείς $\left\{ \begin{array}{l} \vec{\alpha_3} = (0,0,1,0) \\ \vec{\alpha_4} = (0,0,0,1) \end{array} \right.$

για να είναι β του R^4

$\vec{\beta_1} = (1,1,0,0)$

$\vec{\beta_2} = (1/2, 1/2, 0, 2)$

$$\vec{\beta_3} = \vec{\alpha_3} - \frac{\langle \vec{\alpha_3}, \vec{\beta_1} \rangle}{\langle \vec{\beta_1}, \vec{\beta_1} \rangle} \cdot \vec{\beta_1} - \frac{\langle \vec{\alpha_3}, \vec{\beta_2} \rangle}{\langle \vec{\beta_2}, \vec{\beta_2} \rangle} \cdot \vec{\beta_2}$$

$$= (0,0,1,0) - \frac{\langle (0,0,1,0)(1,1,0,0) \rangle}{\langle (1,1,0,0)(1,1,0,0) \rangle} (1,1,0,0) - \frac{\langle (0,0,1,0)(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0, 2) \rangle}{\langle \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0, 2)(1/2, -\frac{1}{2}, 0, 2 \rangle} (\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0, 2)$$

$$= (0,0,1,0) - 0(1,1,0,0) - 0(1/2, -1/2, 0, 2) = (0,0,1,0)$$

Άρα $\vec{\beta_3} = (0,0,1,0)$ (Ελέγχω αν $\vec{\beta_1} \perp \vec{\beta_2}$ και $\vec{\beta_3} \perp \vec{\beta_1}$)

$$\vec{\beta_4} = \vec{\alpha_4} - \frac{\langle \vec{\alpha_4}, \vec{\beta_1} \rangle}{\langle \vec{\beta_1}, \vec{\beta_1} \rangle} \vec{\beta_1} - \frac{\langle \vec{\alpha_4}, \vec{\beta_2} \rangle}{\langle \vec{\beta_2}, \vec{\beta_2} \rangle} \cdot \vec{\beta_2} - \cancel{\frac{\langle \vec{\alpha_4}, \vec{\beta_3} \rangle}{\langle \vec{\beta_3}, \vec{\beta_3} \rangle}} \vec{\beta_3}$$

$$= (0,0,0,1) - \frac{\langle (0,0,0,1)(1,1,0,0) \rangle}{\langle \vec{\beta_1}, \vec{\beta_1} \rangle} \cdot \vec{\beta_1} -$$

$$\frac{\langle (0,0,0,1)(1/2, -1/2, 0, 2) \rangle}{(1/2, -1/2, 0, 2)(1/2, -1/2, 0, 2)} (1/2, -1/2, 0, 2) -$$

$$\frac{\langle (0,0,0,1)(0,0,1,0) \rangle}{\langle \vec{\beta_1}, \vec{\beta_2} \rangle} = (0,0,0,1) - \frac{2}{\frac{9}{2}} \left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, 0, 2 \right) =$$

$=(0,0,0,1)-\frac{4}{9}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0,2\right)=\left(-\frac{2}{9},\frac{2}{9},0,\frac{1}{9}\right)$

$\langle \vec{\beta_2}, \vec{\beta_4} \rangle = \langle (1/2,-1/2,0,2),(-2/9,2/9,0,1/9) \rangle$

$= \dots$

$\vec{\beta_1}, \vec{\beta_2}, \vec{\beta_3}, \vec{\beta_4}$: ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^4$

$\vec{j_1} = \frac{1}{\|\vec{\beta_1}\|} \cdot \vec{\beta_1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$

$\vec{j_2} = \frac{1}{\|\vec{\beta_2}\|} \cdot \vec{\beta_2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{\sqrt{2}}{6}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

$\vec{j_3} = \frac{1}{\|\vec{\beta_3}\|} \cdot \vec{\beta_3} = \frac{1}{1}(0,0,1,0) = (0,0,1,0)$

$\vec{j_4} = \frac{1}{\|\vec{\beta_4}\|} \cdot \vec{\beta_4} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

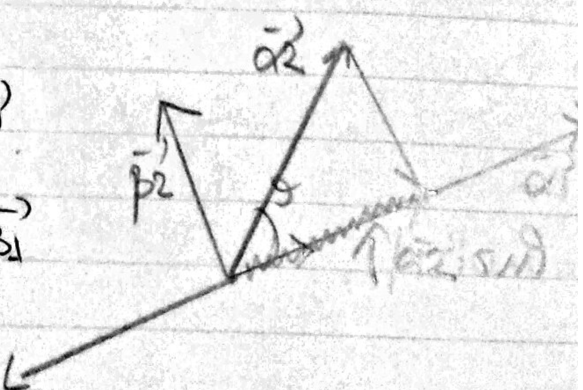
$|\vec{\beta_4}| = \sqrt{\left(\frac{2}{9}\right)^2+\left(\frac{2}{9}\right)^2+0^2+\left(\frac{2}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{81}+\frac{4}{81}+\frac{1}{81}} = \sqrt{\frac{9}{81}} = \frac{1}{3}$

$\vec{\alpha_1}, \vec{\alpha_2}$

$\vec{\beta_1} = \vec{\alpha_1}$

$\vec{\beta_2} = \vec{\alpha_2} - \frac{\langle \vec{\alpha_2}, \vec{\beta_1} \rangle}{\langle \vec{\beta_1} \cdot \vec{\beta_1} \rangle} \cdot \vec{\beta_1}$

$= \vec{\alpha_2} \cdot \frac{|\vec{\alpha_2}|\,|\vec{\beta_1}|\,\text{συνθ} \cdot \vec{\beta_1}}{|\vec{\beta_1}|^2}$



Άσκηση 2

$\mathbb{R}_3[x] \quad \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

$V = \langle 1, x, x^2\rangle = \mathbb{R}_2[x] \subseteq \mathbb{R}_3[x]$

Λύση

Gram-Schmidt

Θεωρώ $\vec{\alpha_1} = 1$, $\vec{\alpha_2} = x$, $\vec{\alpha_3} = x^2$

$\vec{\beta_1} = \vec{\alpha_1} = 1$

$\vec{\beta_2} = \vec{\alpha_2} - \frac{\langle \vec{\alpha_2}, \vec{\beta_1}\rangle}{\langle \vec{\beta_1}, \vec{\beta_1}\rangle}\cdot \vec{\beta_1} = x - \frac{\langle x,1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\cancel{x}$

- $\langle x,1\rangle = \int_0^1 x\cdot 1 dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$

Άρα $\vec{\beta_2} = x - \frac{1}{2}$ $\quad \cdot \langle 1,1\rangle = \int_0^1 1 dx = x\Big|_0^1 = 1$

$\vec{\beta_3} = \vec{\alpha_3} - \frac{\langle \vec{\alpha_3}, \vec{\beta_1}\rangle}{\langle \vec{\beta_1}, \vec{\beta_1}\rangle}\vec{\beta_1} - \frac{\langle \vec{\alpha_3}, \vec{\beta_2}\rangle}{\langle \vec{\beta_2}, \vec{\beta_2}\rangle}\cdot \vec{\beta_2} =$

$= x^2 - \frac{\langle x^2, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle}\cdot 1 - \frac{\langle x^2, x-\frac{1}{2}\rangle}{\langle x-\frac{1}{2}, x-\frac{1}{2}\rangle}\cdot (x-\frac{1}{2})$

$\langle x^2, 1\rangle = \int_0^1 x^2 \cdot 1 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

$\langle x^2, x-\frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 x^2(x-\frac{1}{2})dx = \int_0^1 x^3 - \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

$\langle x-\frac{1}{2}, x-\frac{1}{2}\rangle = \int_0^1 (x-1/2)^2 dx = \int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4} dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}x\Big|_0^1 =$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4-6+3}{12} = \frac{1}{12}$

Άρα $\bar{\beta_3}' = x^2 - \frac{1/3}{1} \cdot 1 - \frac{1/12}{1/12}\left(x-\frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{3} - x + \frac{1}{2} = x^2 - x + \frac{1}{6}$

Βρήκα 3 ορθογώνια. Το επόμενο βήμα είναι να τα κάνω ορθοκανονικά

$$\bar{\gamma_1}' = \frac{\bar{\beta_1}'}{\|\bar{\beta_1}'\|} = 1$$

$$\bar{\gamma_2}' = \frac{\bar{\beta_2}'}{\|\bar{\beta_2}'\|} = \left(x-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{12}}} = \sqrt{12}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\bar{\gamma_3}' = \frac{\bar{\beta_3}'}{\|\bar{\beta_3}'\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{180}}}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

$$\left\langle x^2 - x + \frac{1}{6}, x^2 - x + \frac{1}{6} \right\rangle = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx =$$

$$\int_0^1 x^4 + x^2 + \frac{1}{36} - 2x^3 - 2\frac{x}{6} + 2\frac{x^2}{6}\, dx =$$

$$\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{x}{36} - 2\frac{x^4}{4} - \frac{1}{3}\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{180}$$

Άρα $1, \sqrt{12}\left(x-\frac{1}{2}\right), \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$ είναι ορθοκανονική

βάση του $\mathbb{R}_2[x]$

Φροντιστηριακές ασκήσεις #5

Άσκηση 3

$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0\}$

$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z=0,\ 2x+y-3z=0\}$

υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$ με το συνήθες εσωτερικό γινόμενο

Λύση

Αρχικά θα βρω τυχαία βάση στο V

$x-y-z=0 \quad A=(1\ -1\ -1 \mid 0)$

$x=s+t$ $\qquad$ πιο ελεύθεροι τα y,z

$y=s$

$z=t \quad V=\{(s+t,s,t)\mid s,t\in\mathbb{R}\}=\{s(1,1,0)+t(1,0,1)\mid s,t\in\mathbb{R}\}$

άρα $V=\langle(1,1,0),(1,0,1)\rangle$ Γ.Α. (το ένα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου)

$2=3-\mathrm{rank}(A)$

Είναι βάση τα $(1,1,0),(1,0,1)$, όμως εμείς θέλουμε ορθοκανονική, άρα θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο Gram-Schmidt

$\vec{a_1}=(1,1,0),\ \vec{a_2}=(1,0,1)$

$\vec{\beta_1}=\vec{a_1}=(1,1,0)$

$$\vec{\beta_2}=\vec{a_2}-\Pi_{\langle\vec{\beta_1}\rangle}(\vec{a_2})=\vec{a_2}-\frac{\langle\vec{a_2},\vec{\beta_1}\rangle}{\langle\vec{\beta_1},\vec{\beta_1}\rangle}\cdot\vec{\beta_1}=$$

$$=(1,0,1)-\frac{1}{2}(1,1,0)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$ Ελέγχω αν $\vec{\beta_1}\perp\vec{\beta_2}$

$$\vec{\gamma_1}=\frac{1}{\|\vec{\beta_1}\|}\cdot\vec{\beta_1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0\right)=\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2},0\right)$$

$$\vec{\gamma_2}=\frac{1}{\|\vec{\beta_2}\|}\cdot\vec{\beta_2}=\frac{1}{\sqrt{\frac14+\frac14+1}}\left(\frac12,-\frac12,1\right)=\frac{1}{\sqrt{3/2}}\left(\frac12,-\frac12,1\right)=\left(\frac{\sqrt2}{2\sqrt3},-\frac{\sqrt2}{2\sqrt3},\frac{\sqrt2}{\sqrt3}\right)$$

Συνεπώς $V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x-y-z=0\}=\left\langle\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2},0\right),\left(\frac{\sqrt6}{6},-\frac{\sqrt6}{6},\frac{\sqrt6}{3}\right)\right\rangle$

ορθοκανονική βάση του V ✓

Για την W:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$x + 2y - 3z = 0$ Την παράλειψα των βάθμο σε αυτό λω δεν έχει μεγάλο μονάδα!!!

$y - z = 0$

$x = t$

$y = t$

$z = t$

$W = \{(t,t,t) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t(1,1,1) \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,1) \rangle$

$$\beta' = \frac{1}{\|\beta'\|}\beta' = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}}(1,1,1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

άρα $W = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

ii) $\pi_V(1,1,1) = \langle (1,1,1), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) \rangle (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0) +$

$$\pi_V(1,1,1) = \langle (1,1,1), (\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0) \rangle (\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}, 0) + \langle (1,1,1), (\tfrac{\sqrt{6}}{6}, \tfrac{\sqrt{6}}{6}, \tfrac{\sqrt{6}}{3}) \rangle (\tfrac{\sqrt{6}}{6}, \tfrac{\sqrt{6}}{6}, \tfrac{\sqrt{6}}{3})$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) + \frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

$$= (1,1,0) + \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Άσκηση 4

$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_2 = x_3 = x_4\} = \{(x_4, x_4, x_4, x_4) \mid x_4 \in \mathbb{R}\} =$

$\{x_4 (1,1,1,1) \mid x_4 \in \mathbb{R}\} = \langle (1,1,1,1) \rangle$

$W^{\perp} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \langle (x_1, x_2, x_3, x_4)(s,s,s,s) \rangle = 0 \ \forall (s,s,s,s) \in W\}$

$\langle (x_1, x_2, x_3, x_4)(1,1,1,1) \rangle = 0$

$W^{\perp} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} = V$

Άρα V, W ορθοσυμπληρωματικοί